3D-Skulpturen aus Algebraischen Flächen

FORWISS · Universität Passau
Institut für Softwaresysteme in technischen Anwendungen der Informatik

18. September 2008

FORWISS

UNIVERSITÄT PASSAU
Fakultät für Informatik und Mathematik

Teil I

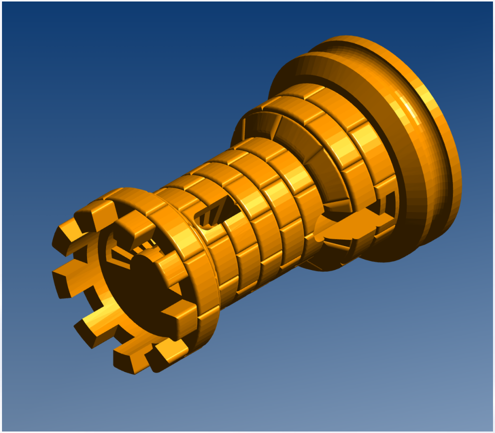
Rapid Prototyping

Begriff „Rapid Prototyping“

Rapid Prototyping:

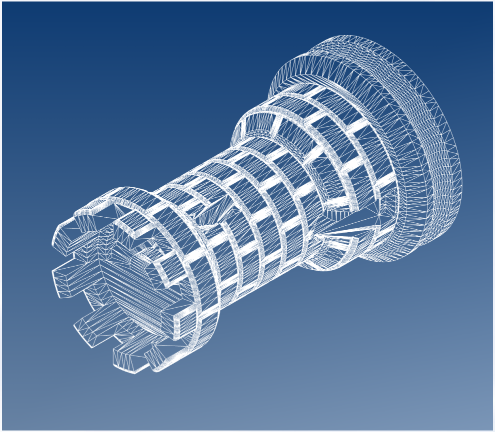
- Werkzeuglose Herstellung von 3D-Modellen aus CAD-Daten
- Aufbau der Modelle Schicht für Schicht
- Schichten werden miteinander verklebt oder verschmolzen
- Im Folgenden kurz erklärt: 3D-Drucken

Datenkette im Rapid Prototyping



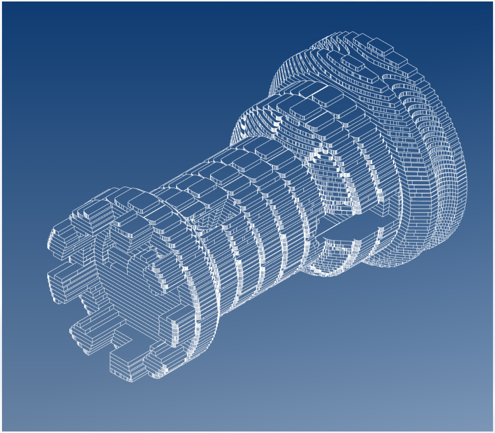
Konstruktionen aus einem CAD-Programm…

Datenkette im Rapid Prototyping



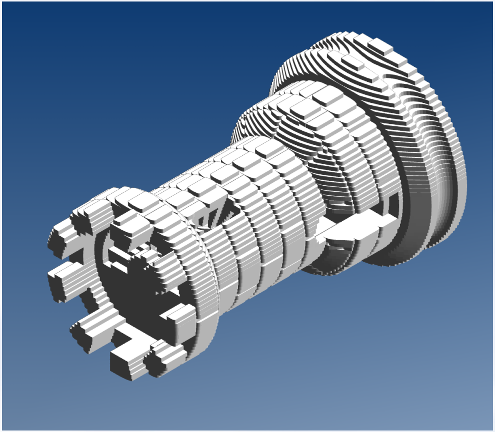
…werden meist als Dreiecksnetz exportiert.

Datenkette im Rapid Prototyping



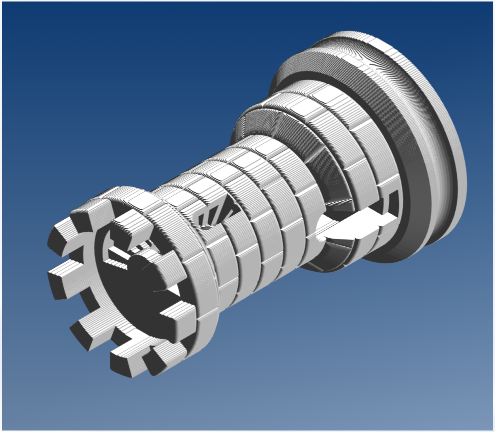
Software der Anlage berechnet daraus äquidistant Querschnitte.

Datenkette im Rapid Prototyping



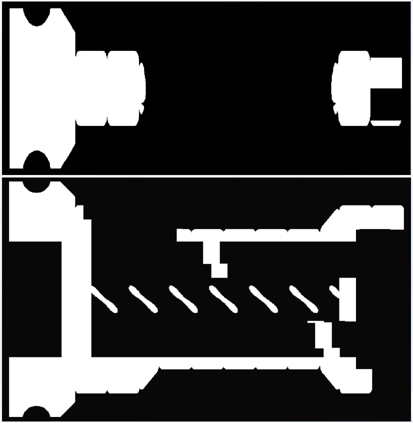
Jeder Querschnitt repräsentiert eine zu druckende Schicht.

Datenkette im Rapid Prototyping



Die Gesamtheit der Schichten approximiert das CAD-Modell.

Datenkette im Rapid Prototyping



Ein 3D-Drucker benötigt für jede Schicht ein Grauwertbild: Wo soll das Pulvermaterial gebunden werden?

3D-Druck: Anlage in Aktion

Bild mit freundlicher Genehmigung von voxeljet technology GmbH, Augsburg, www.voxeljet.de

Ein Rechner übermittelt die Schichtbilder an den 3D-Drucker.

3D-Druck: Anlage in Aktion

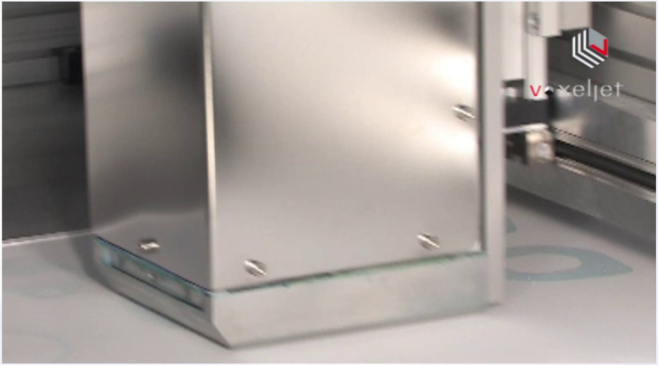


Bild mit freundlicher Genehmigung von voxeljet technology GmbH, Augsburg, www.voxeljet.de

Der Druckkopf fährt „zeilenweise“ über das Pulverbett.
Klebstoff wird nach Vorgabe (Schichtbild) in das Pulver eingetragen.

3D-Druck: Anlage in Aktion

Bild mit freundlicher Genehmigung von voxeljet technology GmbH, Augsburg, www.voxeljet.de

Die Schicht des Bauteils ist im Pulver eingebettet.

3D-Druck: Anlage in Aktion

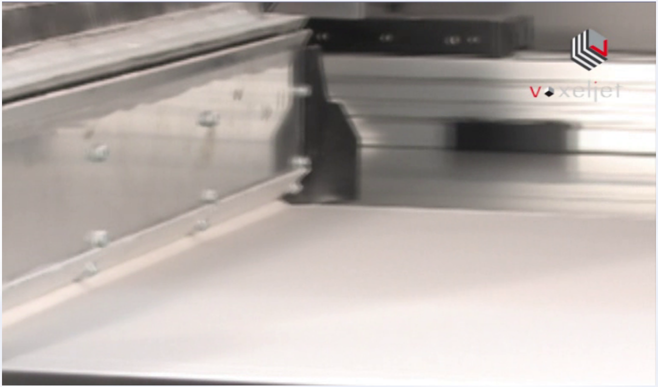


Bild mit freundlicher Genehmigung von voxeljet technology GmbH, Augsburg, www.voxeljet.de

Danach: neue Schicht Pulver auftragen und Iteration

3D-Druck: Resultat

Nach der letzten Schicht wird das Modell aus dem Pulverbett entnommen.

3D-Druck: Anwendungen

Industrielle Anwendungen sind z.B. Herstellung von verlorenen Formen (Gießen)…

3D-Druck: Anwendungen

FORWISS
Universität Passau

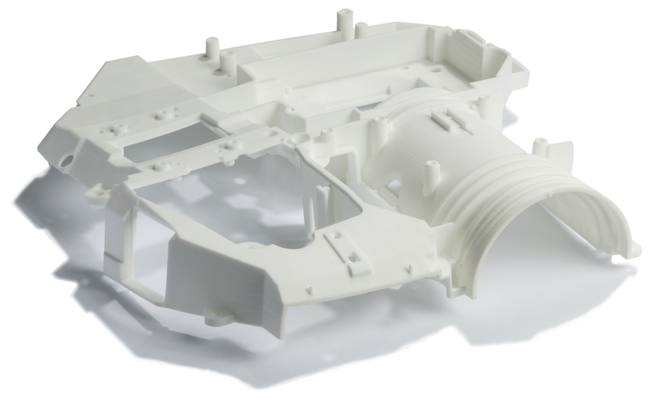


Bild mit freundlicher Genehmigung von voxeljet technology GmbH, Augsburg, www.voxeljet.de

…oder Funktionsteile mit fast beliebigen Formen!

Der Brückenschlag …

Stopp! Sagte ich: Beliebige Formen

Der Brückenschlag …

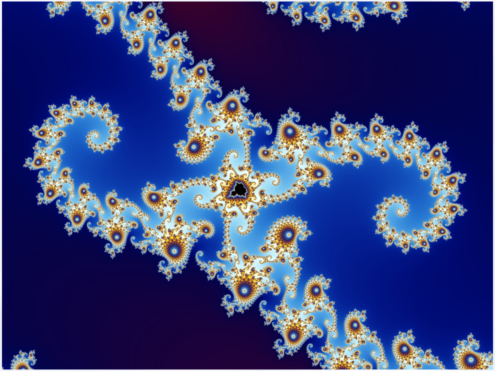


Bild: http://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge

Und das vor einer kritischen Hörerschaft aus Mathematikern?!

Der Brückenschlag zu Algebraischen Flächen

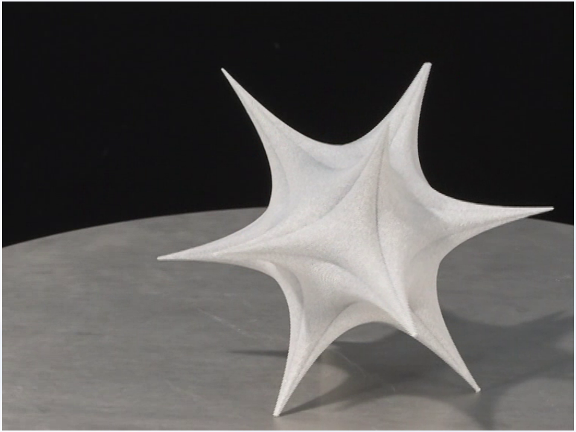


Bild mit freundlicher Genehmigung von voxeljet technology GmbH

Nein, ich sagte: fast beliebige Formen.

Der Brückenschlag zu Algebraischen Flächen

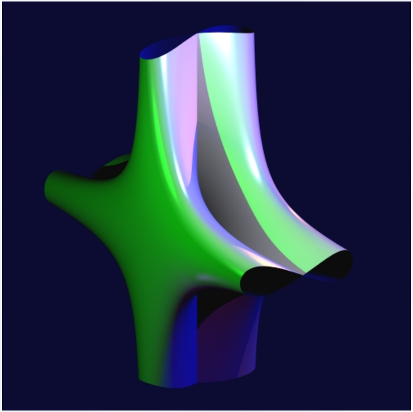


Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Beliebig genug, für ein kleines Experiment…

Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Der Brückenschlag zu Algebraischen Flächen

…3D-Skulpturen von Algebraischen Flächen herzustellen…

Integration in die Ausstellung IMAGINARY

FORWISS Universität Passau

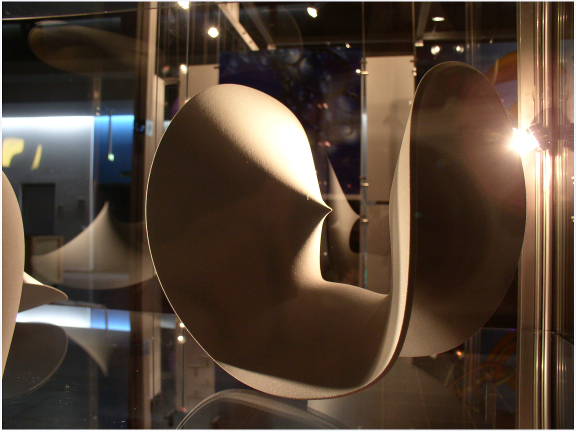


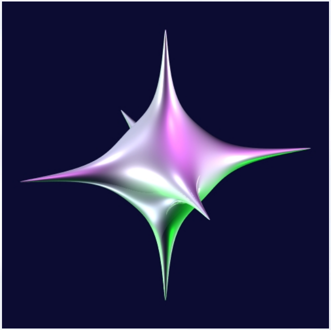
Bild: Dr. Andreas Matt, www.imaginary2008.de

…in die Ausstellung IMAGINARY zu integrieren.

Teil II

Impressionen Algebraischer Flächen

Impressionen Algebraischer Flächen

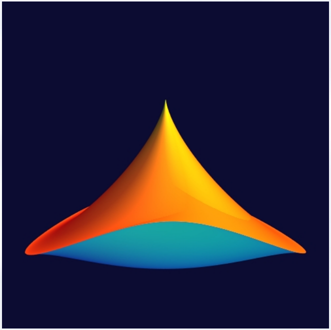


Distel

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1000(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) = 1$$

Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Impressionen Algebraischer Flächen

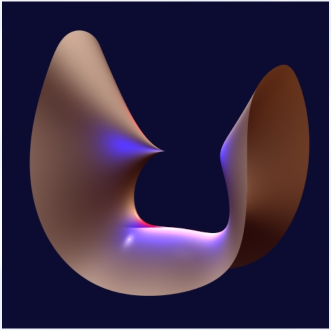


Der Nepali Hut

$$(xy - z^3 - 1)^2 + (x^2 + y^2 - 1)^3 = 0$$

Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

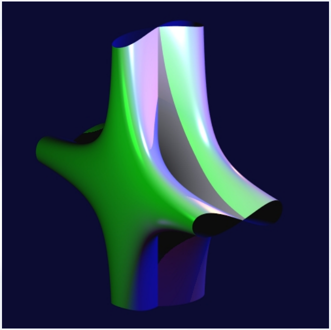
Impressionen Algebraischer Flächen



Vis-A-Vis

$$x^2 - x^3 + y^2 + y^4 + z^3 - z^4 = 0$$

Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc



Helix

$$2x^4 - 6x^2 + y^2z^2 = 0$$

Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Teil III

Was braucht man für einen 3D-Ausdruck einer Algebraischen Fläche?

Was ist gegeben?

FORWISS
Universität Passau

(dreidimensionale) Algebraische Flächen sind …

- …Nullstellenmengen reeller Polynome in drei Variablen
- …durch Polynome und deren Koeffizienten *implizit* gegeben
- …z.T. unbeschränkte Mengen, z.B. $z = 0$
- …z.T. beschränkte Mengen, z.B. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$
- …häufig mit Singularitäten behaftet!

Was wird benötigt?

3D-Drucker benötigen für das Fertigen von Modellen …

- …*explizite* Beschreibung des Bauteils
  - durch geometrische Primitive
  - sehr häufig: Dreiecksnetze
- …Bauteile mit endlichem Durchmesser (vs. $z = 0$)
- …Oberflächen mit eingeschlossenem Volumen (vs. $z = 0$)
- …ausreichende Wandstärken (vs. $z = 0$)

Konvertierung

Gesucht: explizite Form aus impliziter Beschreibung

Mögliche Vorgehensweisen

- Analytisch: Parametrisierung der Algebraischen Fläche
- Approximation: Lorensen und Cline, „Marching Cubes“ (1987)
- oder: vgl. *V*ortrag von M. Sagraloff, Saarbrücken, um 16:00 Uhr

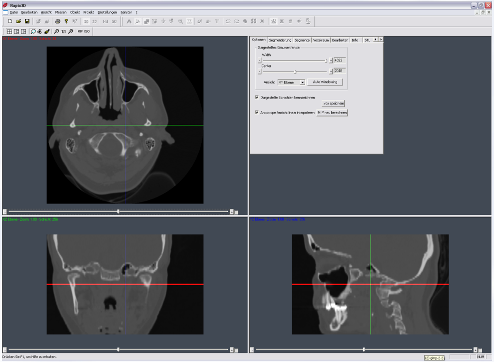
Teil IV

Marching Cubes

Marching Cubes - Eingabedaten

Gegeben: eine reellwertige stetige Funktion *f* auf einem endlichen, quaderförmigen Definitionsbereich und eine reelle Zahl *t*.

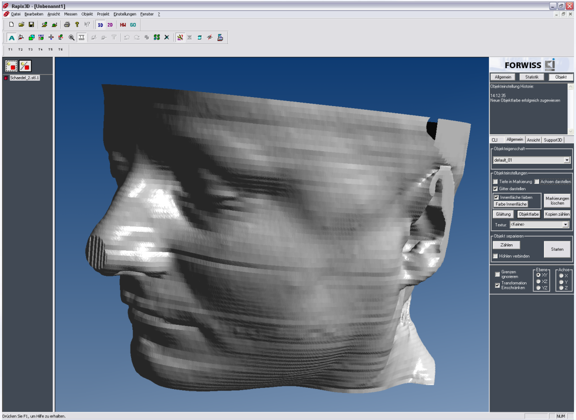
z.B. *f* ein Grauwertbild und *t* ein Grauwert.



Querschnitte eines 3D-Grauwertbildes (CT-Aufnahme)

Marching Cubes - Ausgabe

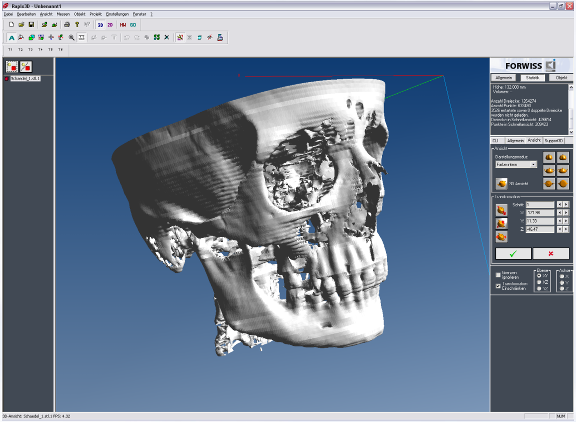
FORWISS
Universität Passau



„Marching Cubes" sucht Stellen, an denen *f* den Wert *t* annimmt und verbindet diese Stellen zu einem Dreiecksnetz.

Marching Cubes - Ausgabe

FORWISS Universität Passau



Ergebnis: approximierte Iso-Niveauflächen zum Niveau *t* von *f*.

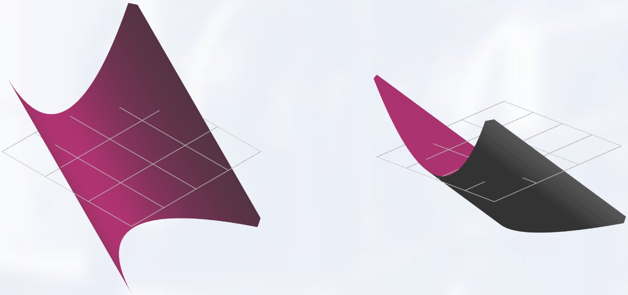
Marching Cubes - Nachteile

Nachteil: Diese Approximation kann von der tatsächlichen Iso-Niveaufläche (auch topologisch) stark abweichen!

$\Longrightarrow$ Oft geht's gut (aber längst nicht immer!)

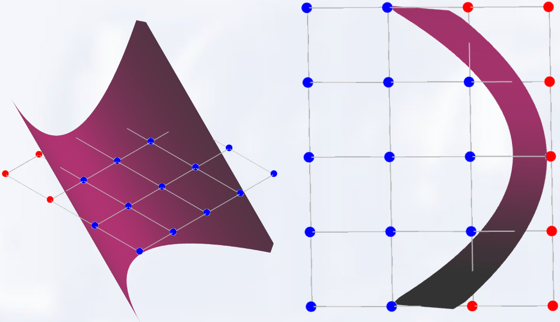
Marching Cubes - Funktionsweise (2D)

Beispiel zur Funktionsweise (in 2D):



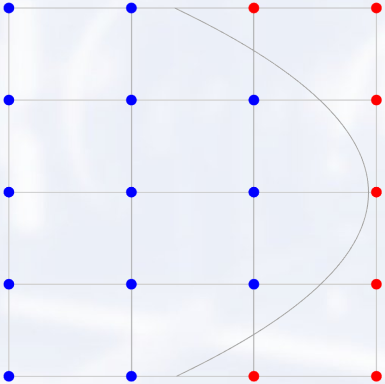
- $f(x, y) = x + y^2 - 1$
- Gitter zeigt die Ebene $z = 0$
- Beachte: Vorzeichen der Funktionswerte an den Gitterknoten

Marching Cubes - Funktionsweise (2D)



- Grundannahme von Marching Cubes:
- Es „genügt“, Funktionswerte an Gitterknoten zu betrachten
- Speziell: An welchen Gitterkanten gibt es Vorzeichenwechsel?

Marching Cubes - Funktionsweise (2D)

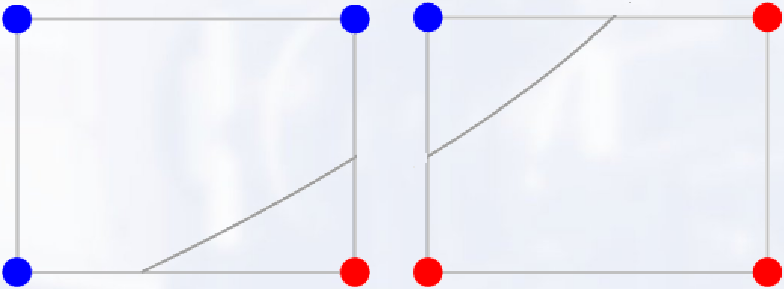


Gitter, Vorzeichen an Gitterknoten und gesuchte Nullstellenmenge

Marching Cubes - Funktionsweise (2D)

- Gleiches Vorzeichen an allen Ecken?
- Annahme: Keine Nullstellen im Rechteck!

Marching Cubes - Funktionsweise (2D)

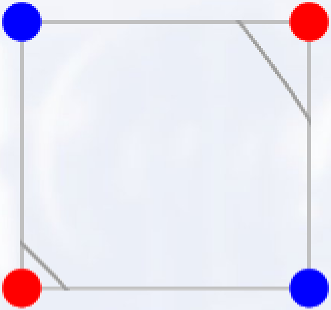


- 3 gleiche Vorzeichen?
- Ann.: Nullstellenmenge lokal durch Strecke approximierbar
- Strecke verläuft zwischen Gitterkanten mit Vorzeichenwechsel

Marching Cubes - Funktionsweise (2D)

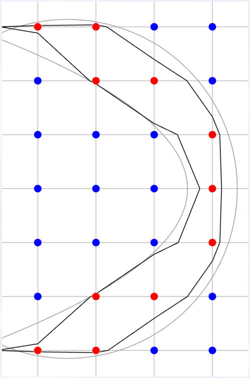
- 2 und 2 „parallel"?
- Wieder: Nullstellenmenge lokal durch Strecke approximierbar
- Strecke verläuft zwischen Gitterkanten mit Vorzeichenwechsel

Marching Cubes - Funktionsweise (2D)



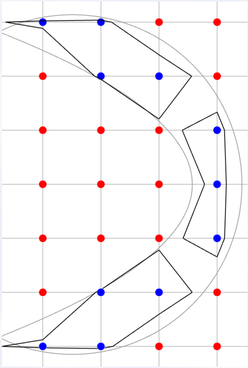
- 2 und 2 „über Kreuz“?
- Ann.: Nullstellenmenge lokal durch 2 Strecken approximierbar
- Aber: welche Gitterkanten verbinden?
- Algorithmus gibt eine feste a priori Entscheidung vor

Marching Cubes - Funktionsweise (2D)



Je nach *f* liefert hat das Ergebnis lokal die „richtige" …

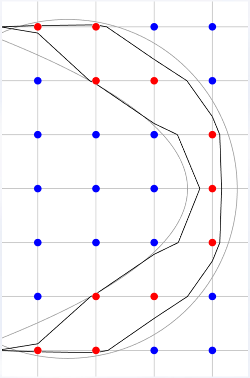
Marching Cubes - Funktionsweise (2D)



…oder „falsche“ Topologie

Leider unvermeidbar bei diesem einfachen Verfahren!

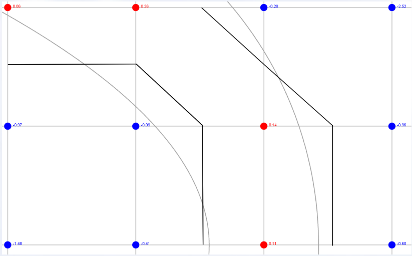
Marching Cubes - Approximation



- Topologie stimmt hier (Zufall!)
- Aber: große euklidische Abweichungen
- Frage: Positionierung der approximierenden Strecken?

Marching Cubes - Approximation

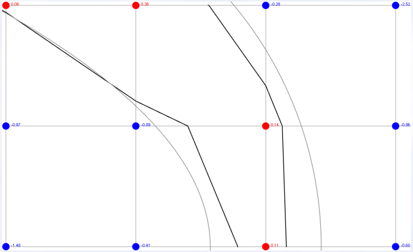
FORWISS
Universität Passau



- Simpel: Mitte der Gitterkante

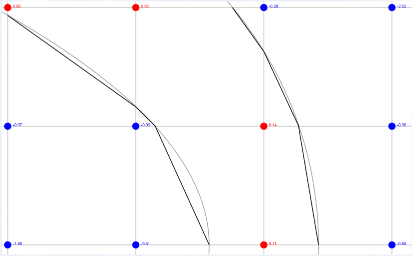
Marching Cubes - Approximation

FORWISS
Universität Passau



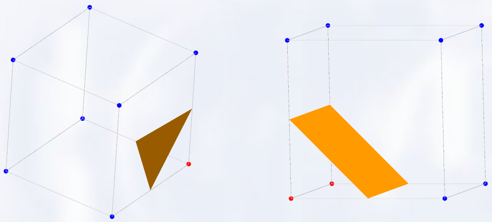
- Alternative: Lineare Interpolation („*f* lokal linear")
- Problem: *f* ist i. A. nicht linear!
- Beispiel „Kreis und Parabel": Polynom vom Grad 4

Marching Cubes - Approximation



- Wenn *f* kontinuierlich: Nullstellensuche per Subdivision

Marching Cubes 3D

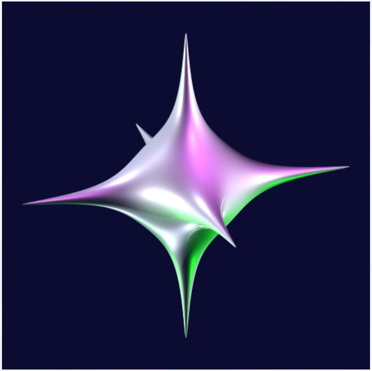


- analog: nur Betrachten der Vorzeichenwechsel an Gitterknoten
- analog: Nullstellenmenge lokal durch Dreiecke approximieren
- analog: Positionierung der Dreiecksecken per Subdivision
- Alle Oberflächenstücke sind überschneidungsfrei!
- Topologie wird von Approximation i.A. nicht erhalten

Teil V

Marching Cubes Ergebnisse

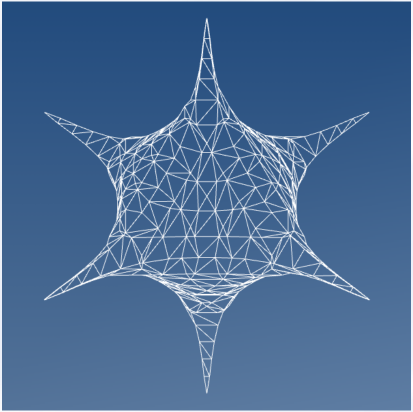
Marching Cubes – Ergebnisse



Von dem Modell „Distel“ lässt sich auf diese Weise …

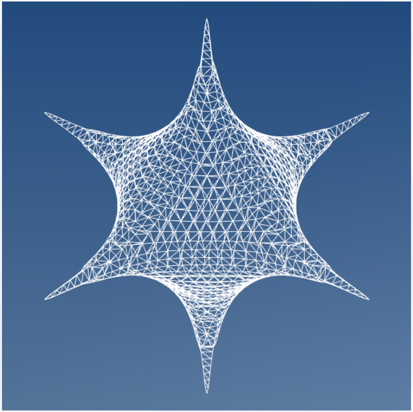
mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Marching Cubes – Ergebnisse



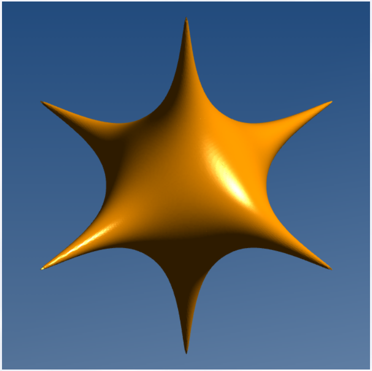
…ein Dreiecksnetz für den 3D-Druck errechnen (1’028 Dreiecke)

Marching Cubes – Ergebnisse



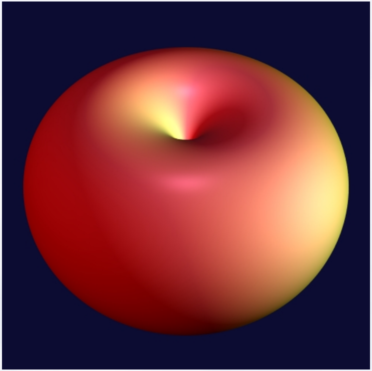
Feinere Gitter verbessern Genauigkeit …
…aber die Anzahl der Dreiecke explodiert! (5’960 Dreiecke)

Marching Cubes – Ergebnisse



24cm Skulptur bei IMAGINARY: Dreiecksnetz mit 598’040 Dreiecken
Gedruckt wird nicht die Algebraische Fläche, sondern $f^{-1}(]-\infty,0])$

Marching Cubes – Ergebnisse

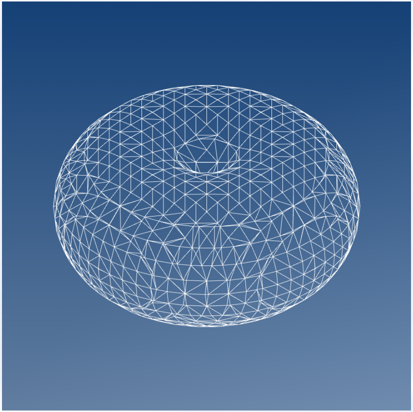


Auch „Dullo" kam so von seiner polynomialen Form …

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

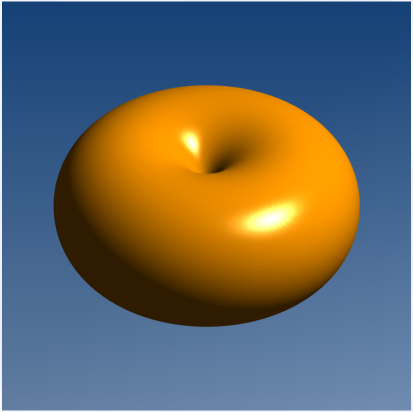
mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Marching Cubes – Ergebnisse



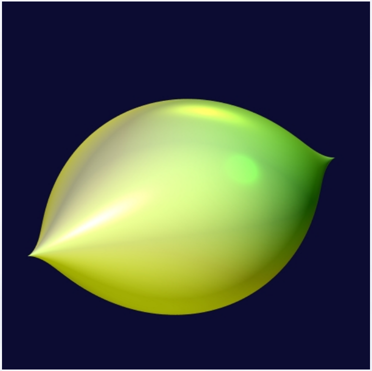
…via Triangulierung mit Marching Cubes …

Marching Cubes – Ergebnisse



…als Skulptur zu IMAGINARY (640’392 Dreiecke).

Marching Cubes – Ergebnisse

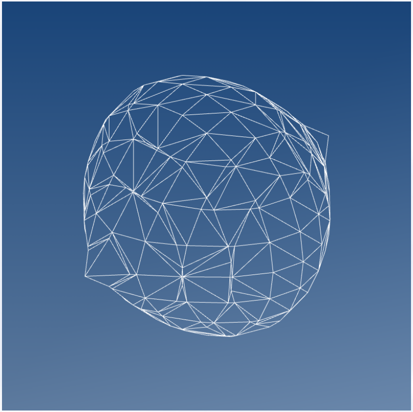


Genauso wie aus dem „Zitrus“ und der einfachen Formel

$$x^2 + z^2 + y^3(y-1)^3 = 0$$

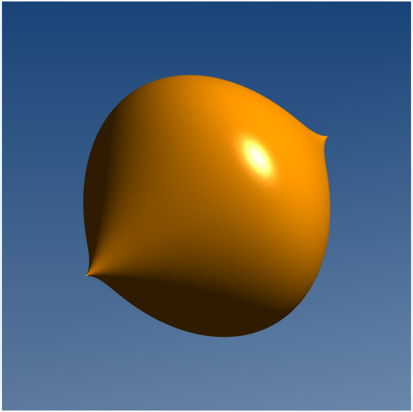
... mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Marching Cubes – Ergebnisse



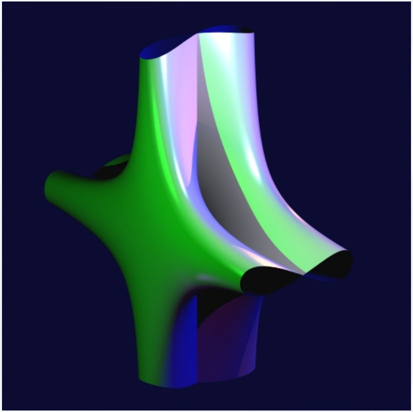
…auf diesem Weg …

Marching Cubes – Ergebnisse



…355’352 Dreiecke ausgepresst wurden.

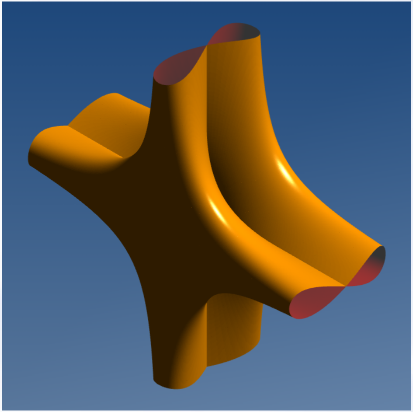
Marching Cubes – Ergebnisse

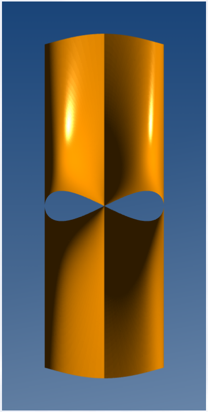


Aber ein 3D-Drucker kann nur dann etwas drucken …

mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

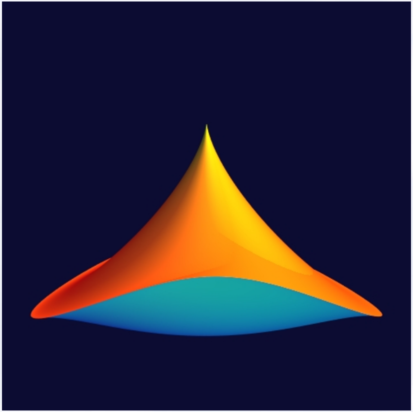
Marching Cubes – Ergebnisse





…wenn der Datensatz ein endliches Volumen einschließt!

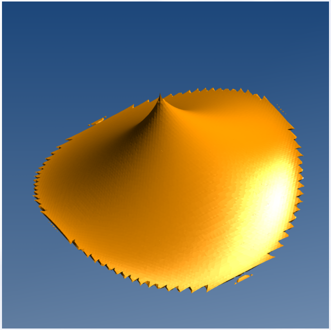
Marching Cubes – Ergebnisse

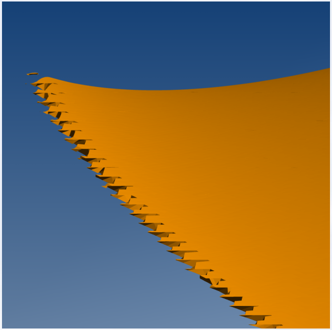


Und Marching Cubes, selbst mit feinsten Gittern, …

mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Marching Cubes – Ergebnisse





…liefert oft völlig unbrauchbare Dreiecksnetze!

Teil VI

Parametrisierung

Skulpturen mittels Parametrisierung

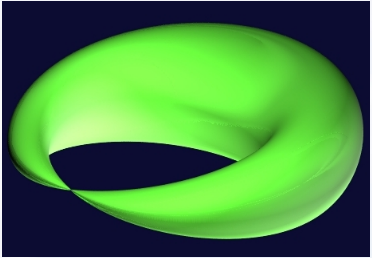
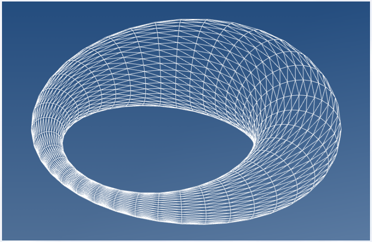


Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

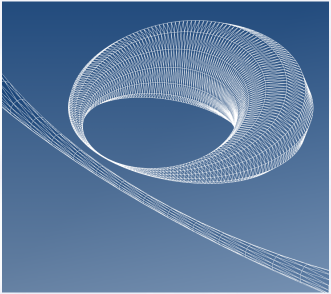
- Neben erz. Polynom ist manchmal Parametrisierung bekannt
- Z.B. „Croissant“ ist Entartungsfall der Dupin’schen Cyclide
- Zur Parametrisierung der Dupin’schen Cyclide gibt es Literatur
- Zunächst: $\phi : [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \ldots$
- Abb.vorschrift für überabzählbar viele Oberflächenpunkte

Skulpturen mittels Parametrisierung - Croissant



- Beachte: Dreiecksnetz benötigt endlich viele Knotenpunkte
- Daher: Auswertung nur an endlich vielen Stützpunkten
- Hier: Anordnung der Stützpunkte auf regelm. Rechtecksgitter
- Dazwischen Stückweise affin lineare Oberfläche (Dreiecksnetz)

Skulpturen mittels Parametrisierung - Croissant



- Croissant kann trotzdem nicht gedruckt werden
- Endliche Auflösung der Maschine
- Unerwünschte Materialeigenschaften im Grenzbereich
- Statt dessen: „fast“ entartete Dupin’sche Cyclide
- Keine Singularität („kleiner Radius = 0“), sondern $\frac{1}{2}$mm

Skulpturen mittels Parametrisierung - Nepali

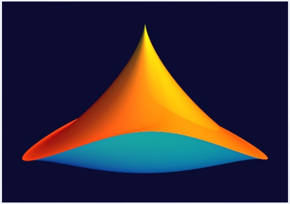
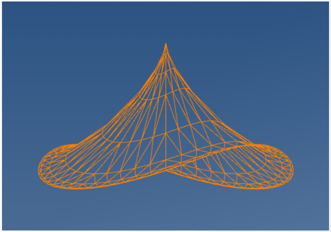


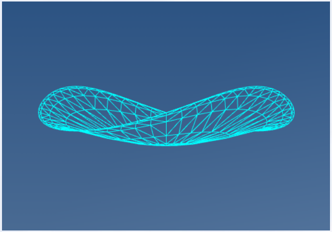
Bild mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

Wie gewinnt man CAD-Daten für das „Nepali"?

$$(xy - z^3 - 1)^2 = -(x^2 + y^2 - 1)^3$$

Skulpturen mittels Parametrisierung - Nepali

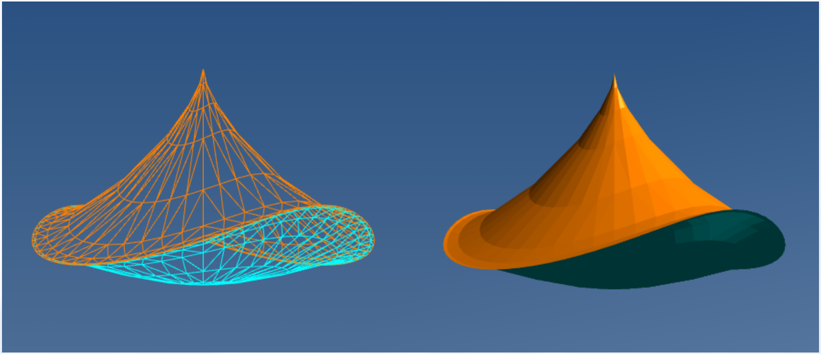




$$(xy - z^3 - 1)^2 = -(x^2 + y^2 - 1)^3$$

- Auflösen nach z z.B. mittels Computeralgebrasystem
- Ergibt 2 Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 : K_0(1) \longrightarrow \mathbb{R}$

Skulpturen mittels Parametrisierung - Nepali

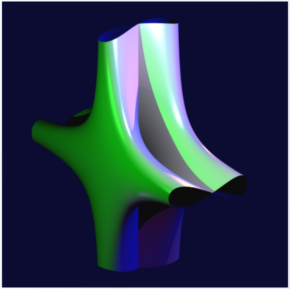


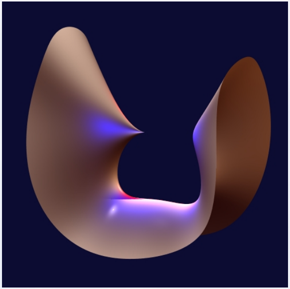
- Gesuchte Fläche ist Vereinigung der Graphen von φ_1 und φ_2
- Volumen: „oberhalb“ Boden und „unterhalb“ Deckel
- Diese Fläche kann in 3D gedruckt werden

Teil VII

Wände aufblasen…

Wie druckt man etwas unendlich dünnes?





Bilder mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Herwig Hauser, Wien, www.freigeist.cc

- Bisher: Polynome mit beschränkter Nullstellenmenge
- Gebundenes Volumen beim 3D-Druck: Urbild von $]-\infty, 0]$
- Bei unbeschränkten Nullstellenmengen nicht möglich!
- Erste Idee: mit Quader/Kugel schneiden und abschließen

Was druckt man statt dessen?

- Alternative Idee: Flächen mit einer Wandstärke versehen
- Mittels Offset-Flächen
- Aber Offset nur nach einer Seite hin
- Denn Offset „verrundet“ Singularitäten

Berechnung von Offsetflächen

FORWISS
Universität Passau

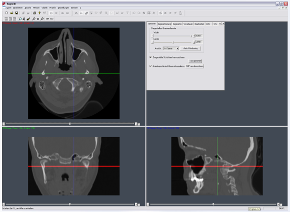
- Wie erhält man die Offsetfläche zu einer Algebraischen Fläche?
- Hier genügt Approximation der Fläche als Dreiecksnetz
- Dazu

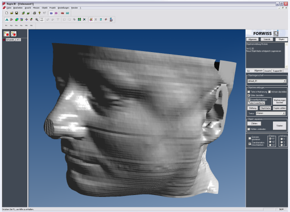
Distanzfeld Φ_A zur Menge $A \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Phi_A((x,y,z)) = min\,\{||a-(x,y,z)||\;|\;a \in A\}$$

„Euklidischer Abstand jedes Punktes zur Menge A“

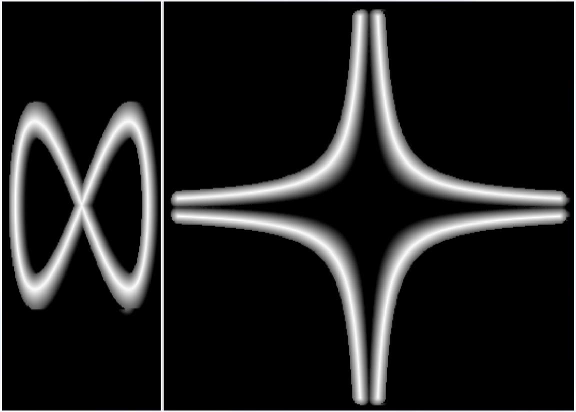
Berechnung von Offsetflächen via Distanzfeld





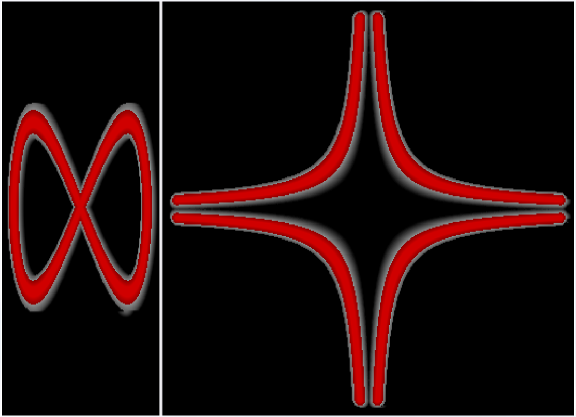
- Erinnerung: Marching Cubes funktioniert auch auf (3D-)Grauwertbildern
- Es genügt Berechnung des Distanzfeld als 3D-Grauwertbild
- Ergebnis von Marching Cubes auf Distanzfeld ist Approximation der Offsetfläche!

Berechnung von Offsetflächen via Distanzfeld



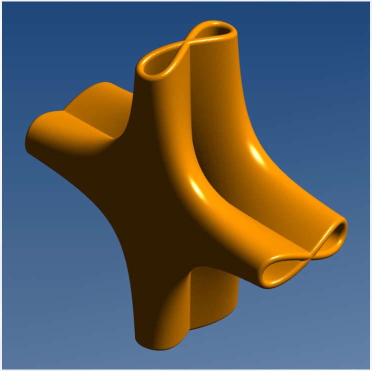
3D-Distanzfeld von Helix (getrimmt, Radius = 5)

Berechnung von Offsetflächen via Distanzfeld



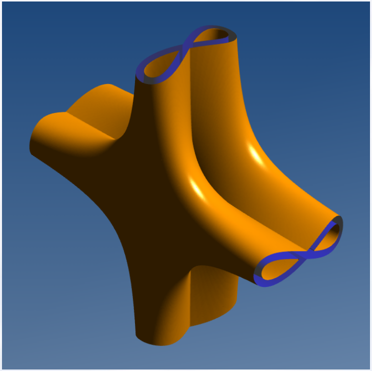
Segmentierung: rote Pixel sind näher als 0.125 an Helix (Radius = 5)

Berechnung von Offsetflächen via Distanzfeld



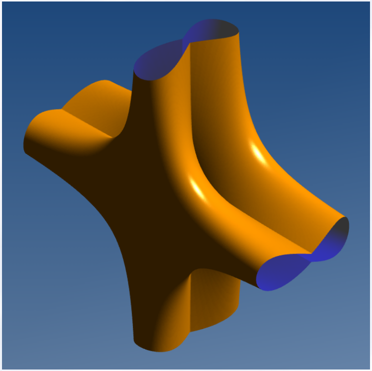
- Approximation der Offsetfläche mit Abstand 0.125 zu Helix

Zusammenführung von Fläche und Offset



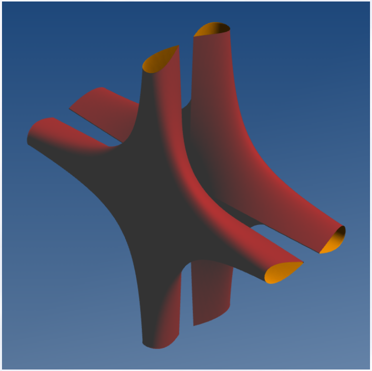
- Trimmen mit Kugel um 0 mit Radius 5
- Fläche zerfällt in drei Teile A_1, A_2, A_3

Zusammenführung von Fläche und Offset



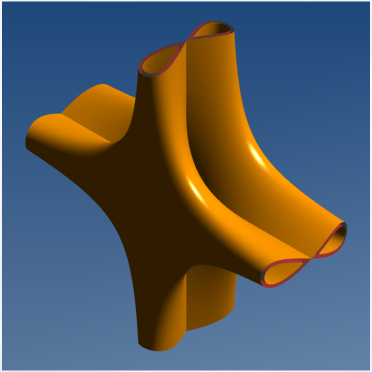
Verwerfen: $A_1 \subset helix^{-1}(]0, \infty[)$ auf „pos. Seite von Helix“

Zusammenführung von Fläche und Offset



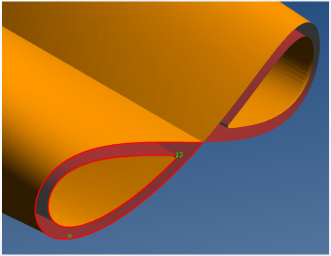
Behalten: $A_2, A_3 \subset helix^{-1}(]-\infty, 0[)$ auf „neg. Seite von Helix“

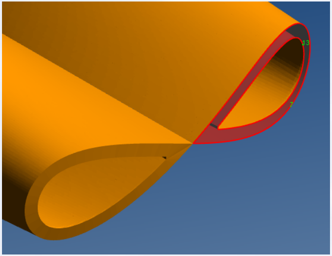
Zusammenführung von Fläche und Offset



- Zusammen mit getrimmter Helix-Fläche fast fertig
- Fehlt: schließen der Löcher

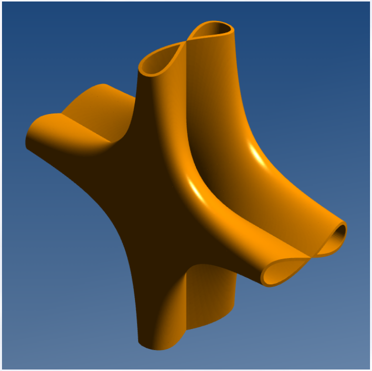
Zusammenführung von Fläche und Offset





- „Vernähen“ der Ränder

Zusammenführung von Fläche und Offset



Fertig! Der 3D-Druck kann beginnen…

3D-Skulpturen aus Algebraischen Flächen

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!