

Meißnersche Körper: Konstruktion und 3D-Druck

Dr. Alexander Zimmermann

FORWISS · Universität Passau

Institut für Softwaresysteme in technischen Anwendungen der Informatik

18. September 2008



- ◆ Dr. Alexander Zimmermann
- ◆ Informatikstudium an der Universität Passau
- ◆ Seit 1990 Mitarbeiter am Lehrstuhl Numerische Mathematik und Analysis
- ◆ Promotion 1997 über "Parametrisierungs- und Lokalisierungstechniken in der Spline-Oberflächenapproximation"
- ◆ Seit 2001 Mitarbeiter am Institut FORWISS
- ◆ Schwerpunkt: Spline-Approximation und Bildverarbeitung



Teil I

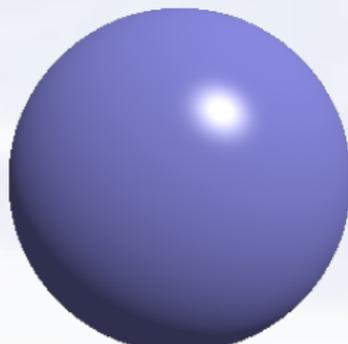
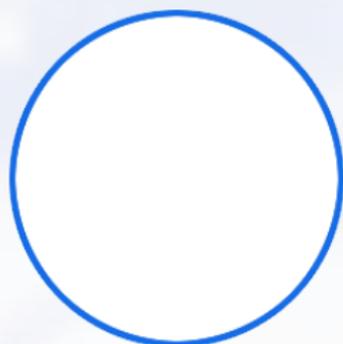
Gleichdick

- ◆ Objekt K : zusammenhängende, kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^n
- ◆ Weite (Durchmesser) von K in Richtung $v \in S^{n-1}$:

$$W(K, v) = \max \{ \langle v | p \rangle \mid p \in K \} - \min \{ \langle v | p \rangle \mid p \in K \}$$

- ◆ Gleichdick (Objekt/Körper konstanter Weite):

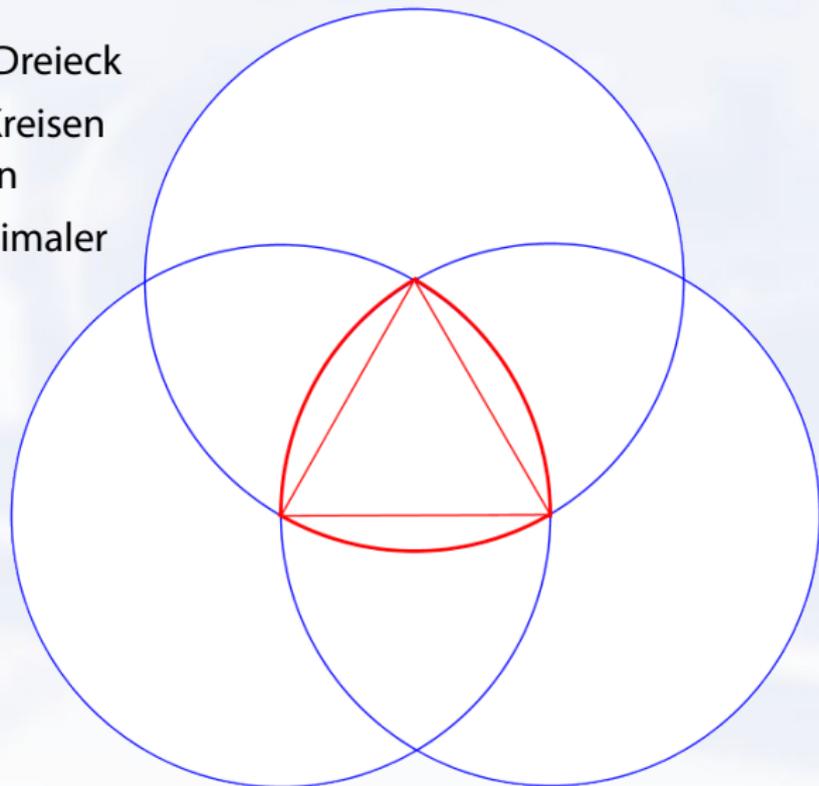
$$W(K, v) = c \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } v \in S^{n-1}$$



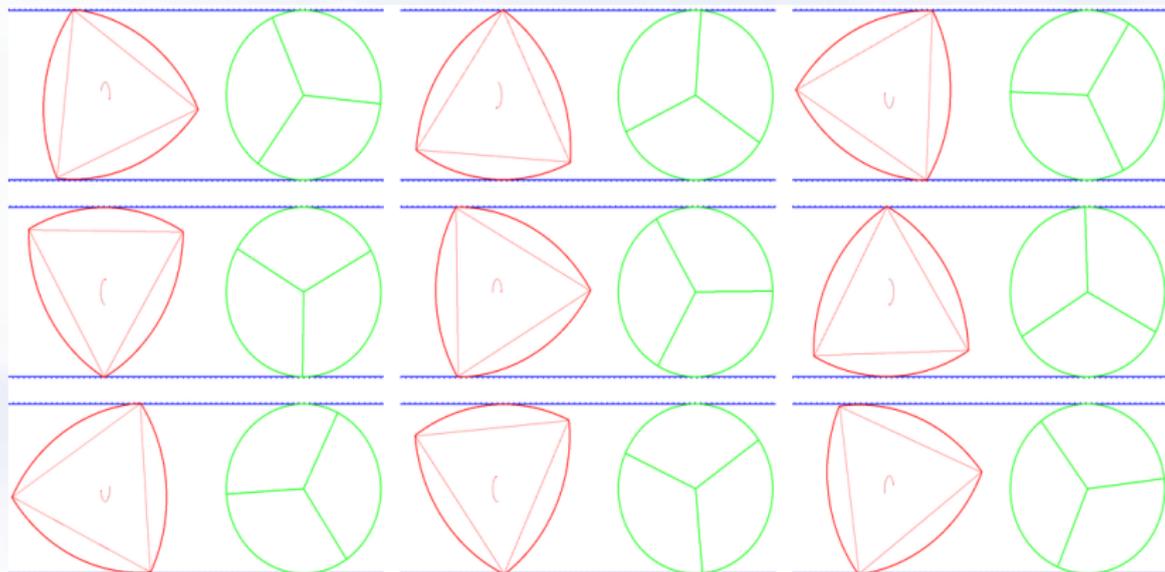
Teil II

Reuleaux Dreieck und Tetraeder

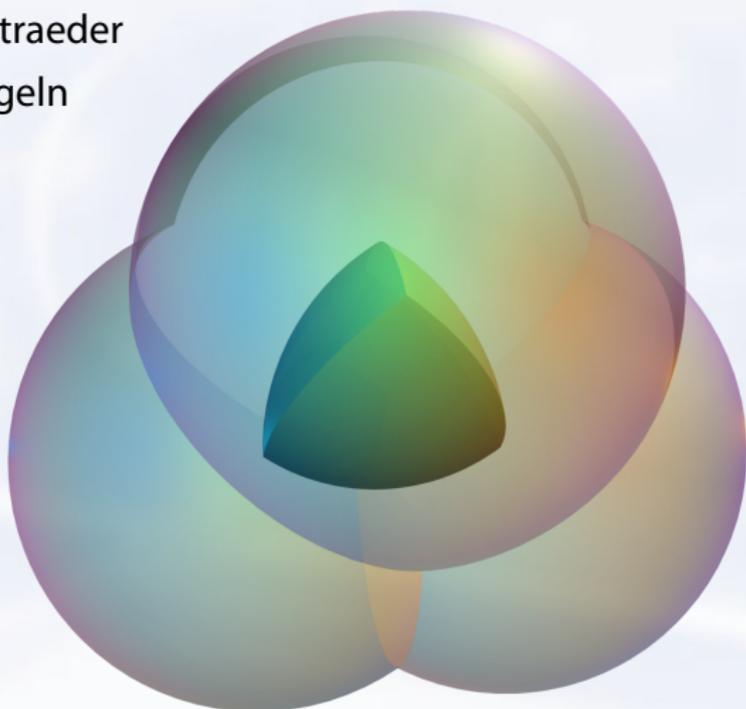
- ◆ Gleichseitiges Dreieck
- ◆ Schnitt von 3 Kreisen durch die Ecken
- ◆ Gleichdick minimaler Fläche



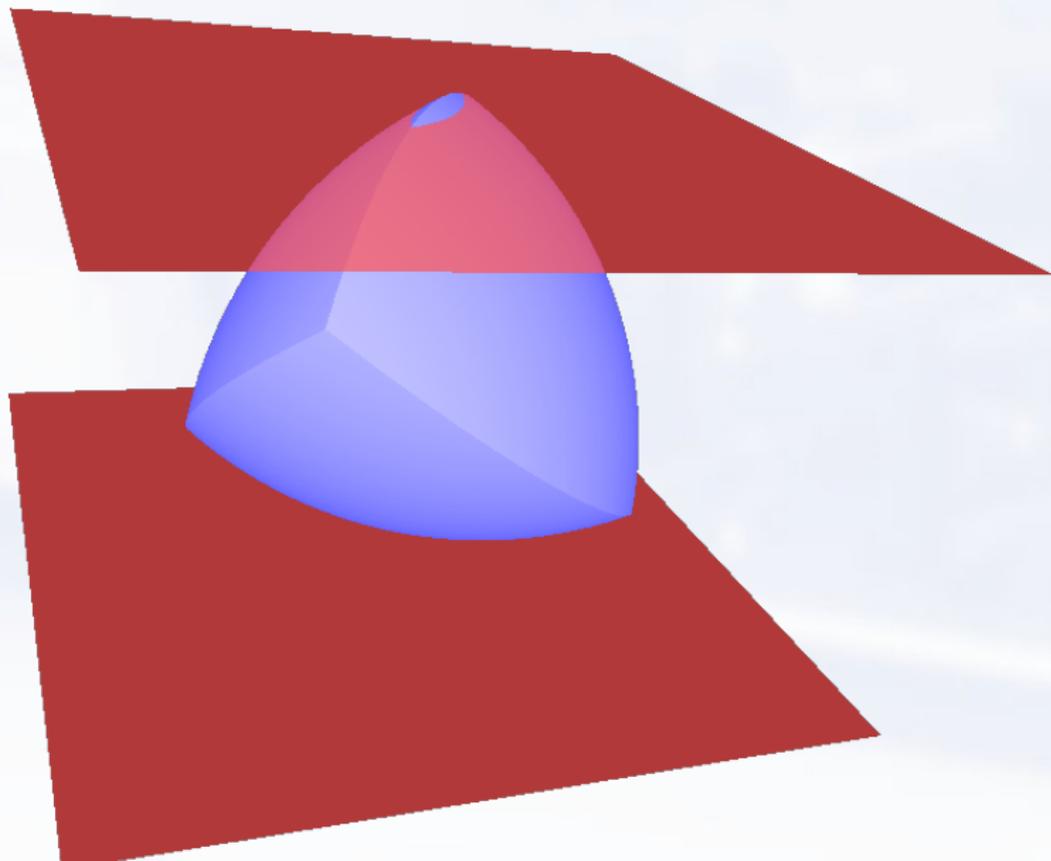
Reuleaux Dreieck Bewegung



- ◆ Gleichseitiges Tetraeder
- ◆ Schnitt von 4 Kugeln durch die Ecken
- ◆ Kein Gleichdick, maximale Weite $(\sqrt{3} - \sqrt{2}/2) s \approx 1.0249 s$



Reuleaux Tetraeder: kein Gleichdick



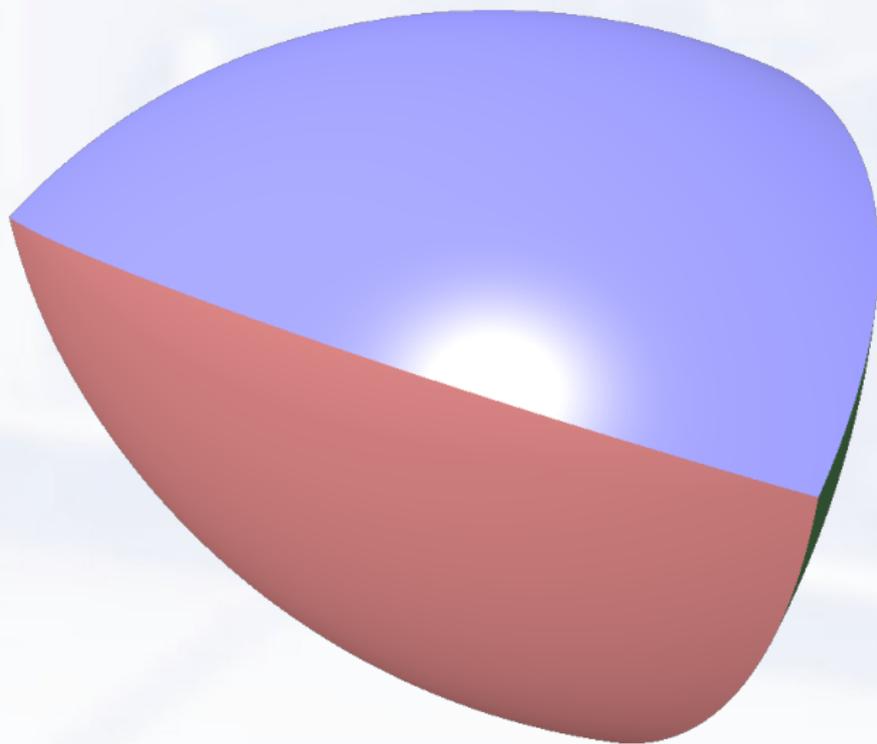
Teil III

Meißnersche Körper

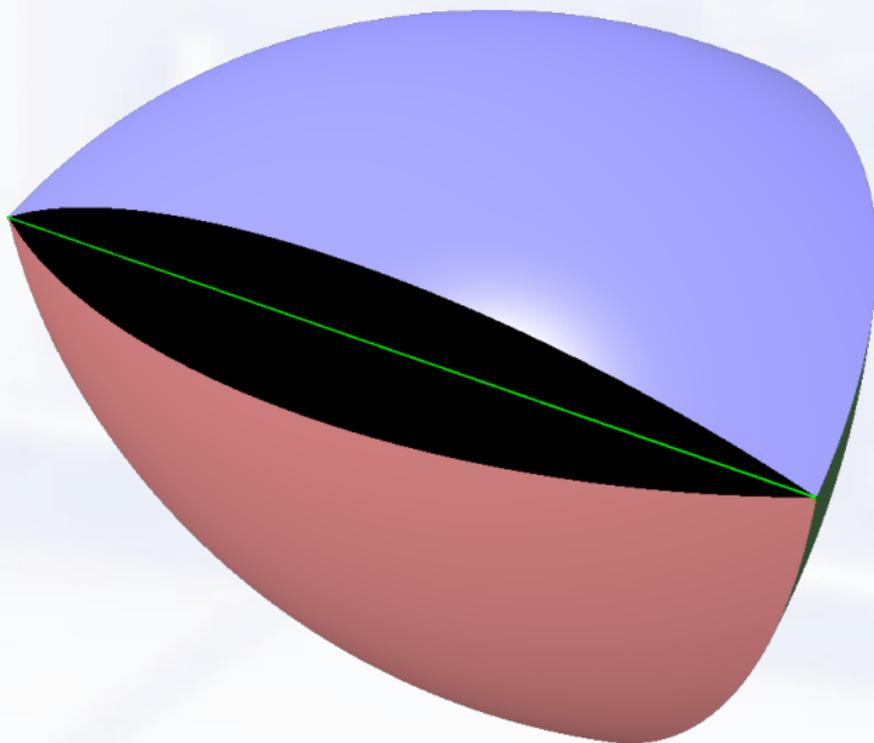
Konstruktion nach Ernst Meißner und Friedrich Schilling (1912)

- ◆ wähle jeweils eine von 2 gegenüberliegenden Kanten des Reuleaux Tetraeders.
- ◆ ersetze diese Kante durch ein spindelförmiges Zwischenstück (Teil eines Rotationskörpers).
- ◆ Randkurven (Rotationskurven) ergeben sich aus Schnitt des Reuleaux Tetraeders mit den fortgesetzten Seiten des erzeugenden Tetraeders.
- ◆ Vermutlich Gleichdick mit minimalem Volumen.

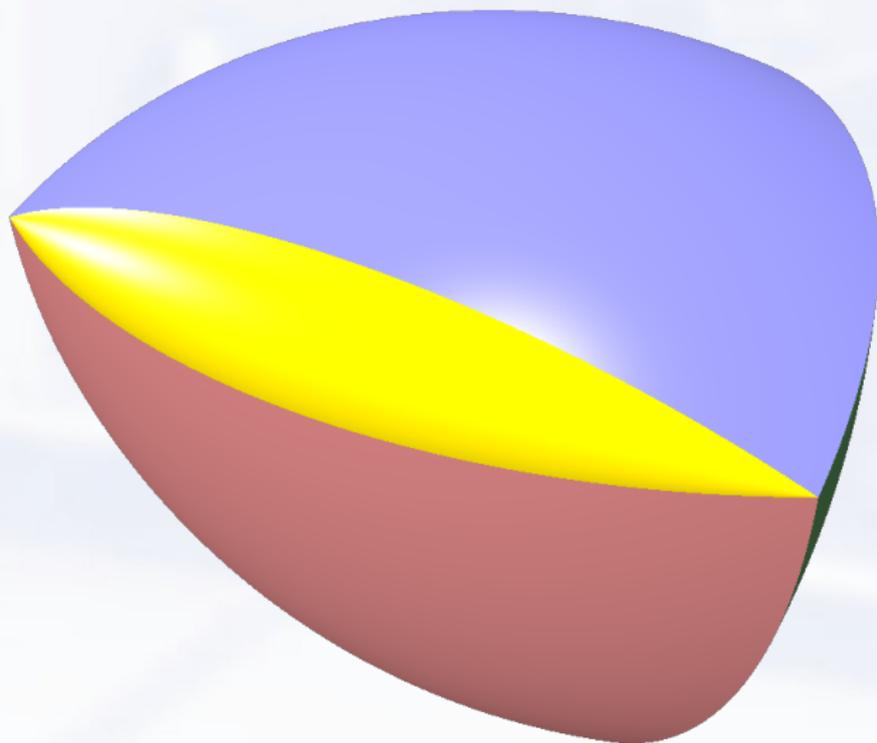
Konstruktion nach Ernst Meißner und Friedrich Schilling (1912)



Konstruktion nach Ernst Meißner und Friedrich Schilling (1912)

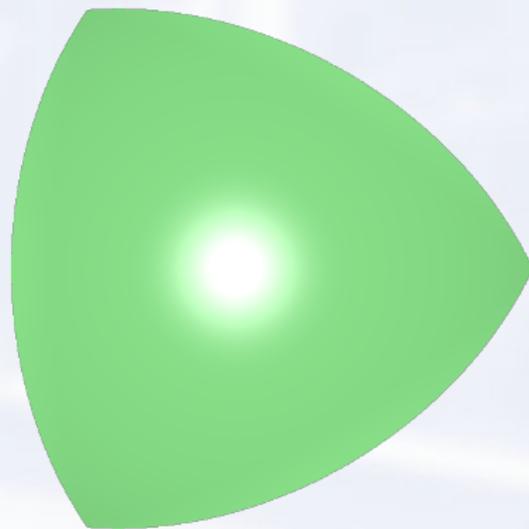
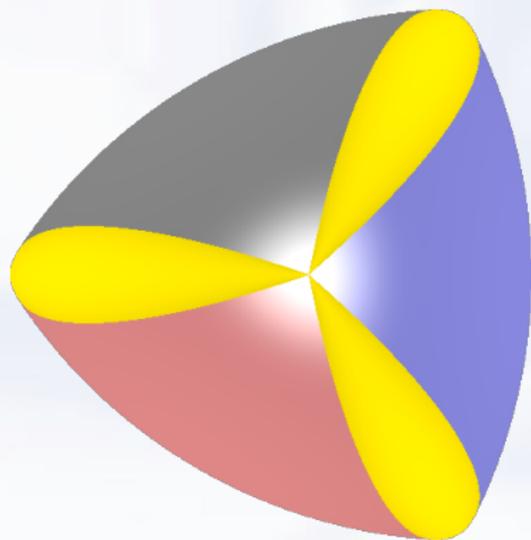


Konstruktion nach Ernst Meißner und Friedrich Schilling (1912)



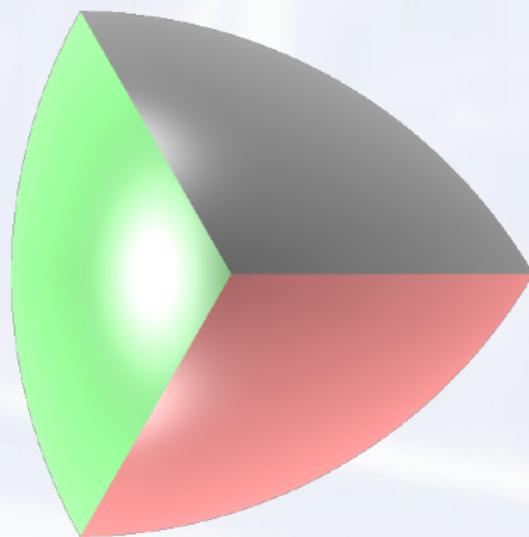
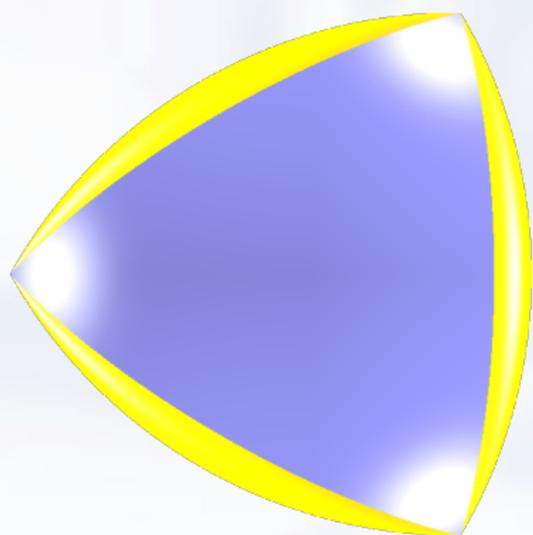
Konstruktion nach Ernst Meißner und Friedrich Schilling (1912)

- ◆ Drei Spindeln mit gemeinsamer Ecke



Konstruktion nach Ernst Meißner und Friedrich Schilling (1912)

- ◆ Drei Spindeln mit gemeinsamer Fläche



Teil IV

Algebraische Darstellung

Reuleaux Tetraeder

- ◆ Seien q_1, \dots, q_4 die Ecken des Tetraeders
- ◆ Die Kugelfunktionen $f_i(p) = \|p - q_i\|^2 - r^2$ sind innerhalb der Schnittmenge alle negativ.

- ◆ Die Funktion

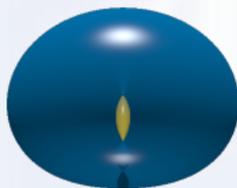
$$f = \max\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

hat als Nullstellenmenge genau den Rand des Reuleaux Tetraeders.

- ◆ Die Nullstellenmenge von f kann mit dem Marching-Cube-Algorithmus trianguliert werden.

Meißnersche Körper

- ◆ Die Bereiche in denen eine Spindel einzusetzen ist ergeben sich jeweils als Schnitt S_i zweier Halbräume.
- ◆ Die Spindel ist ein Teil eines (entarteten) Torus T_i .

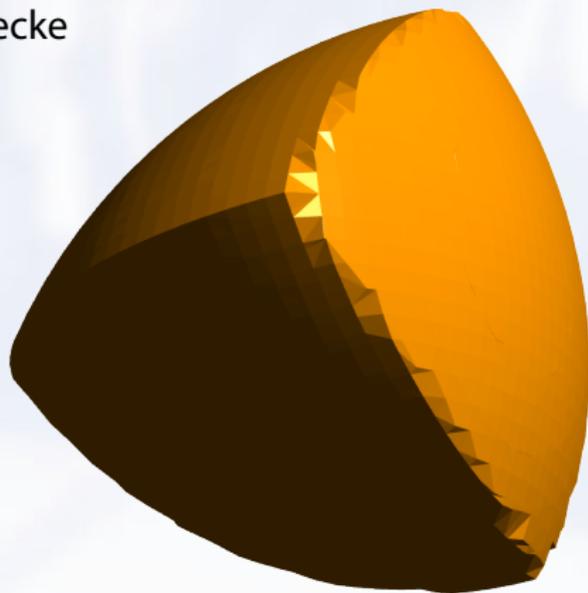


- ◆ Eine stückweise algebraische Beschreibung eines Meißnerschen Körpers lässt sich schreiben als

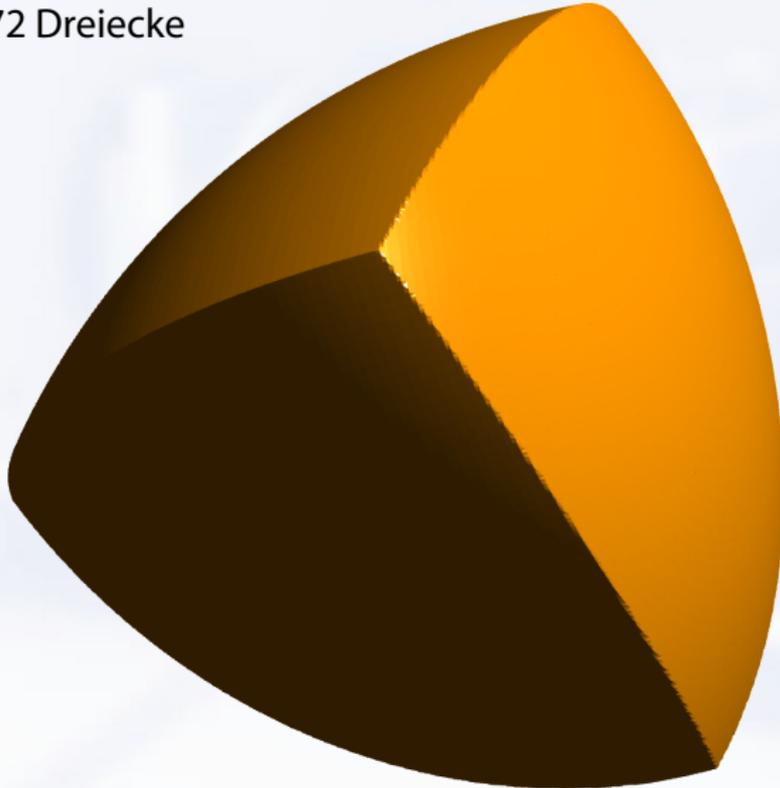
$$g(p) = \begin{cases} T_i(p) & \text{falls } p \in S_i \\ f(p) & \text{sonst} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3$$

- ◆ Die Nullstellenmenge von g kann ebenfalls mit dem Marching-Cube-Algorithmus trianguliert werden.

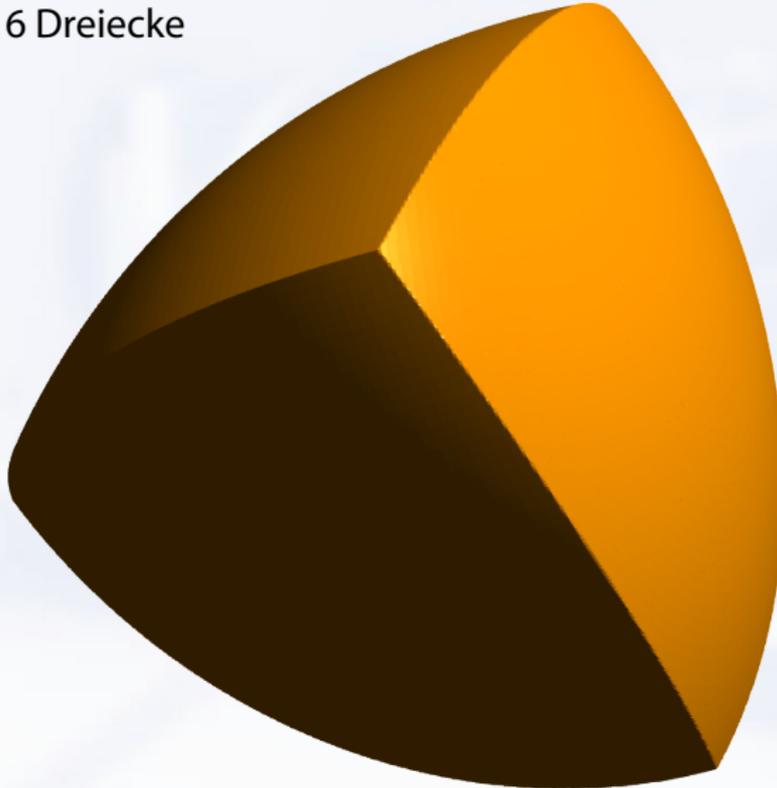
- ◆ Höchstens zwei Kanten laufen parallel zu einer Koordinatenachse.
- ◆ Triangulation liefert zackige Kanten.
- ◆ 21584 Dreiecke



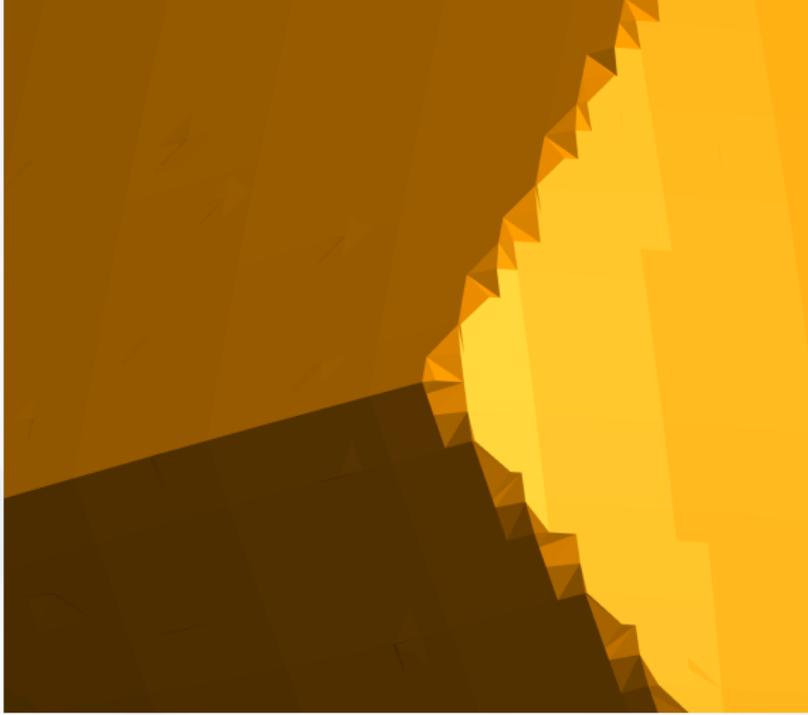
◆ 345772 Dreiecke



◆ 778116 Dreiecke



778116 Dreiecke (Zoom)



5412 Dreiecke

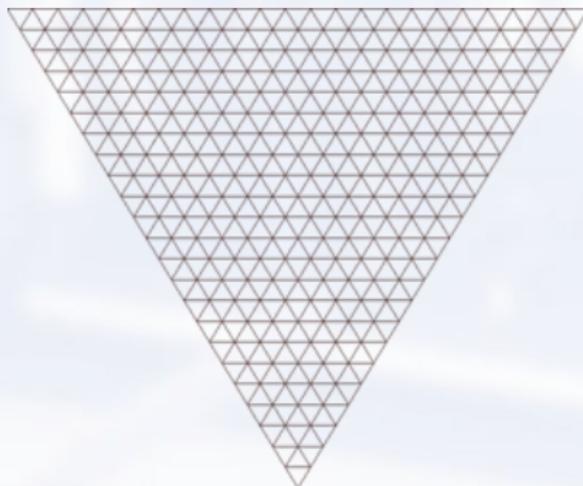
(Reuleaux Tetraeder 5k)

Teil V

Parameter Darstellung

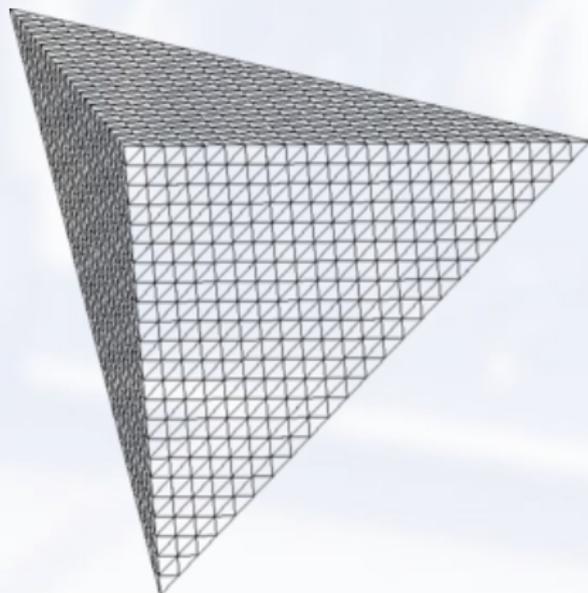
Reuleaux Tetraeder

- ◆ Triangulierung eines Dreiecks entlang Baryzentrischer Koordinaten.



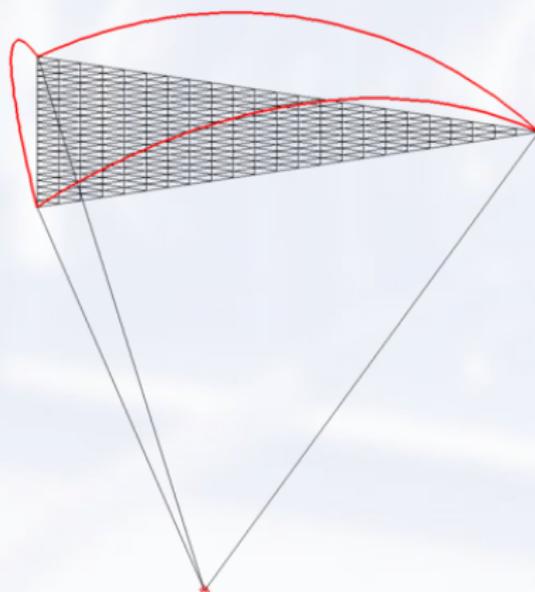
Reuleaux Tetraeder

- ◆ Anwendung auf Dreiecke des Tetraeders.



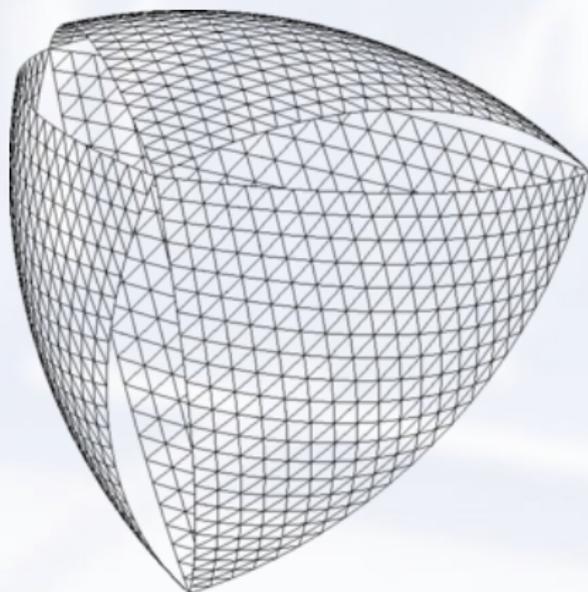
Reuleaux Tetraeder

- ◆ Verschiebung der Ecken nach Außen auf Kugeloberfläche.



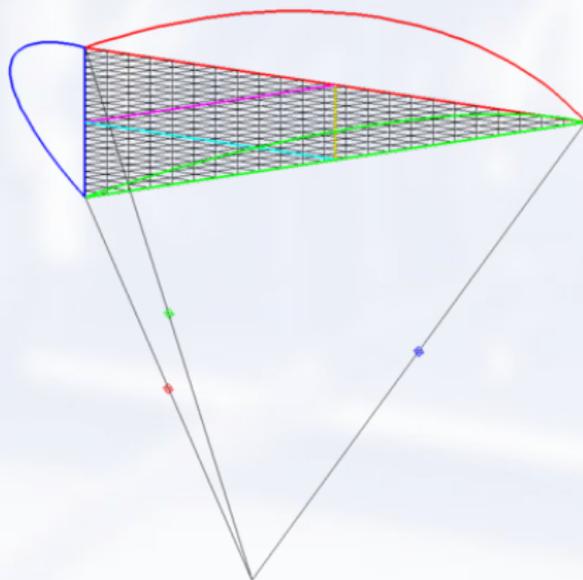
Reuleaux Tetraeder

- ◆ Verschiebung der Ecken nach Außen auf Kugeloberfläche.



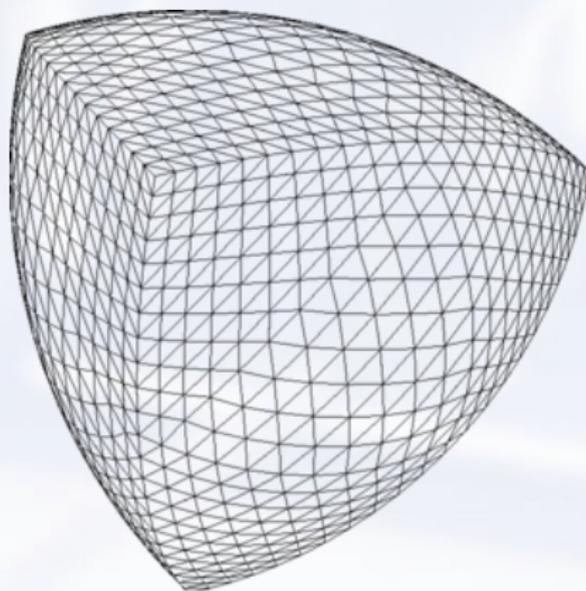
Reuleaux Tetraeder

- ◆ Richtung der Verschiebung anpassen.



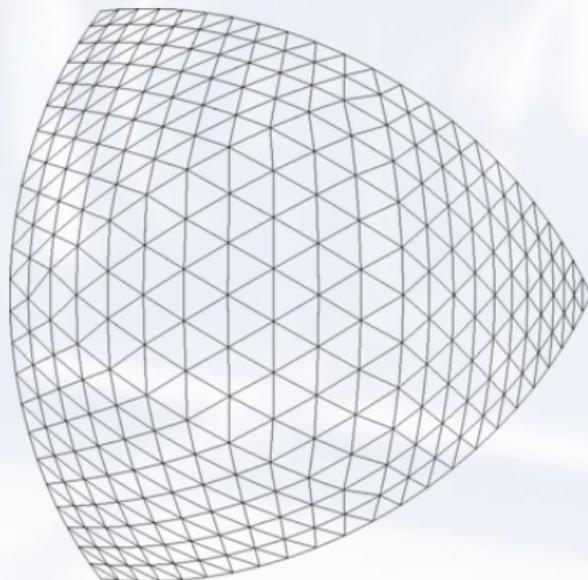
Reuleaux Tetraeder

- ◆ Richtung der Verschiebung anpassen.



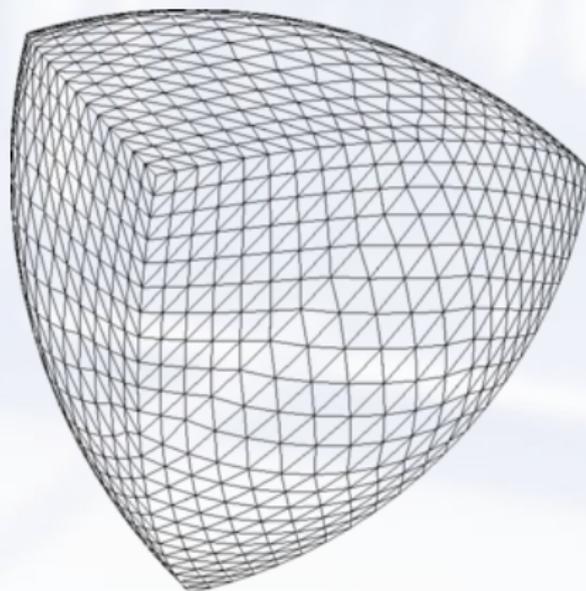
Reuleaux Tetraeder

- ◆ Richtung der Verschiebung anpassen.



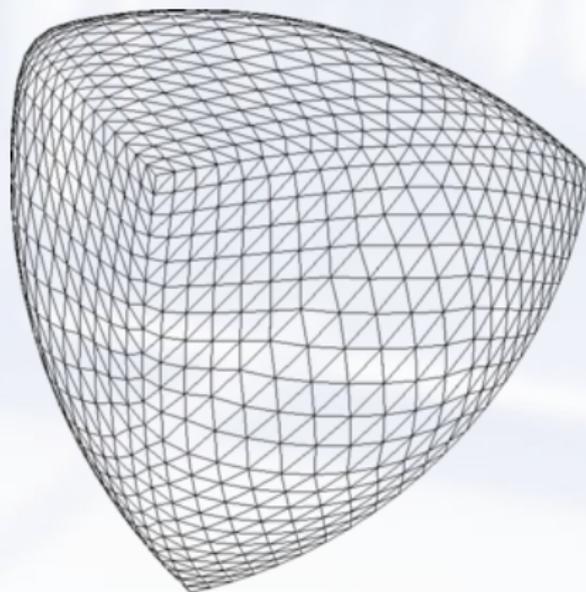
Meißnersche Körper

- ◆ Prüfe ob Ecke im Spindel-Raum liegt.
- ◆ Verschiebe Ecke in Richtung Spindelachse.



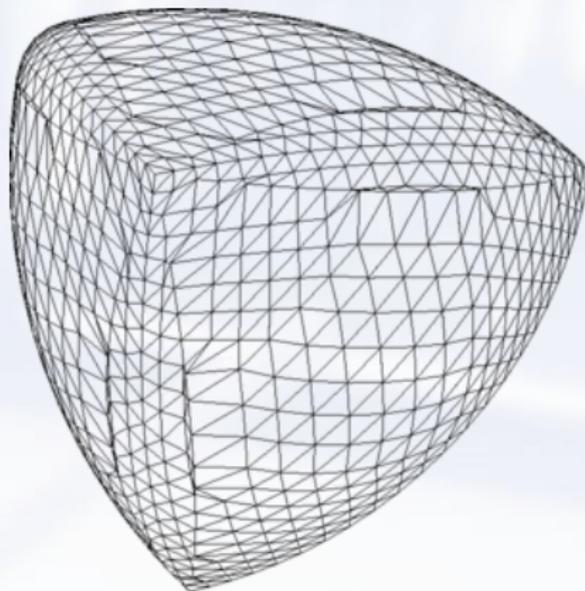
Meißnersche Körper

- ◆ Prüfe ob Ecke im Spindel-Raum liegt.
- ◆ Verschiebe Ecke in Richtung Spindelachse.

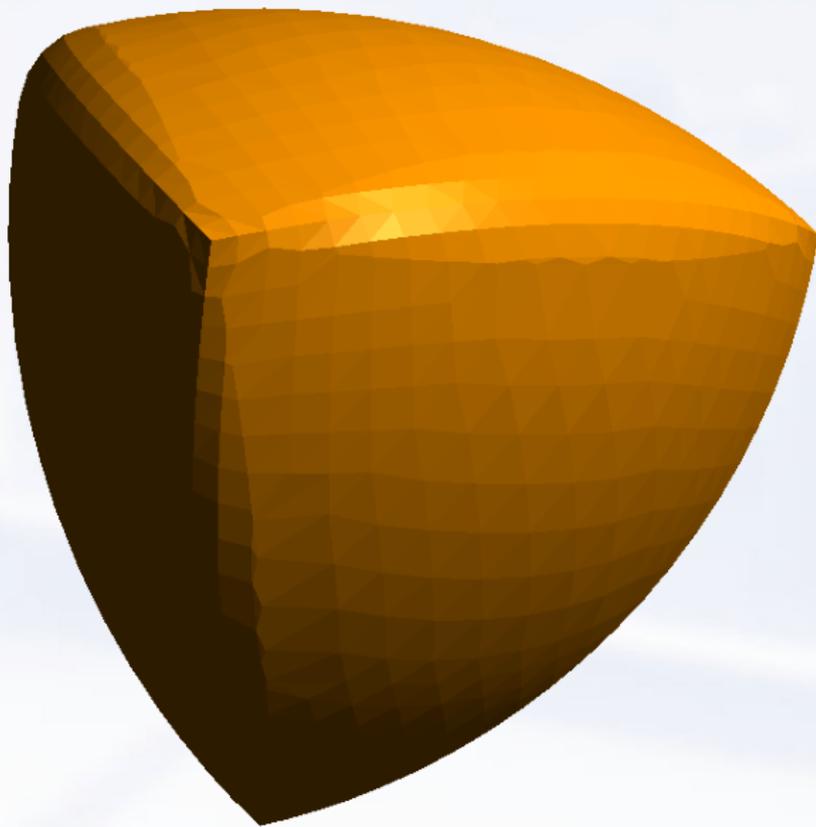


Meißnersche Körper

- ◆ Prüfe ob Ecke im Spindel-Raum liegt.
- ◆ Verschiebe Ecke in Richtung Spindelachse.
- ◆ Verschiebe Ecke auf Schnittkante.

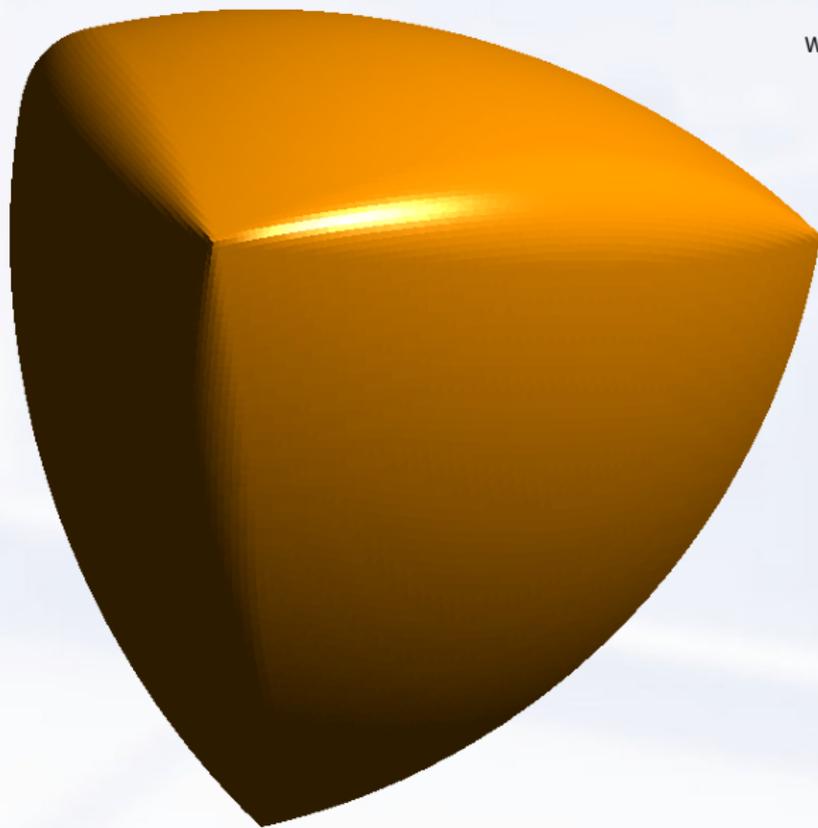


2116 Dreiecke



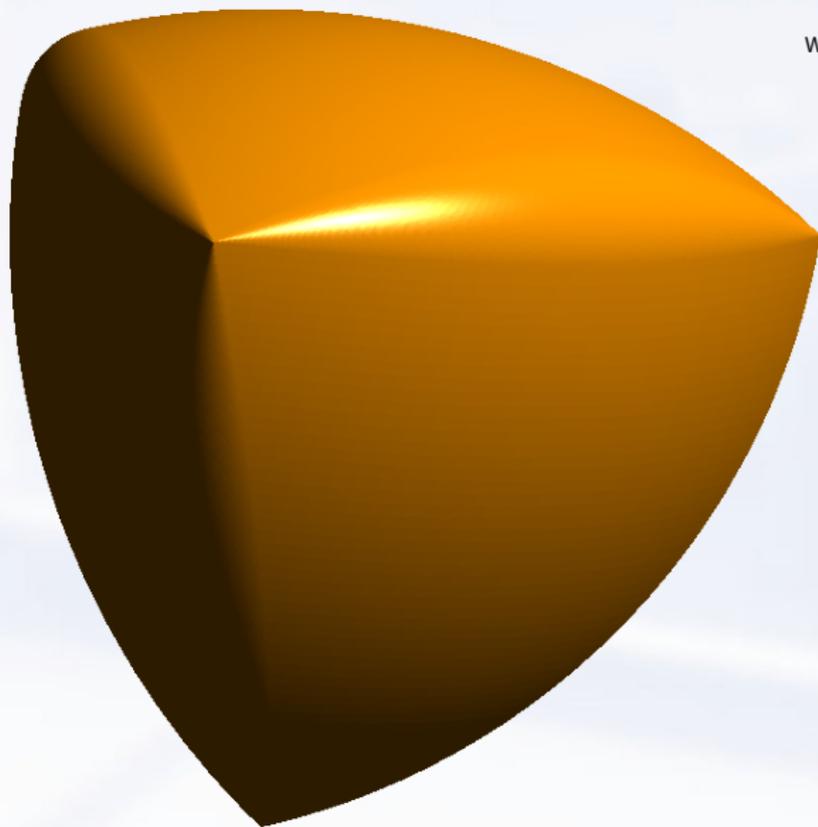
Weite: 0,99792 - 1
($\approx 166\mu\text{m}$)

40804 Dreiecke



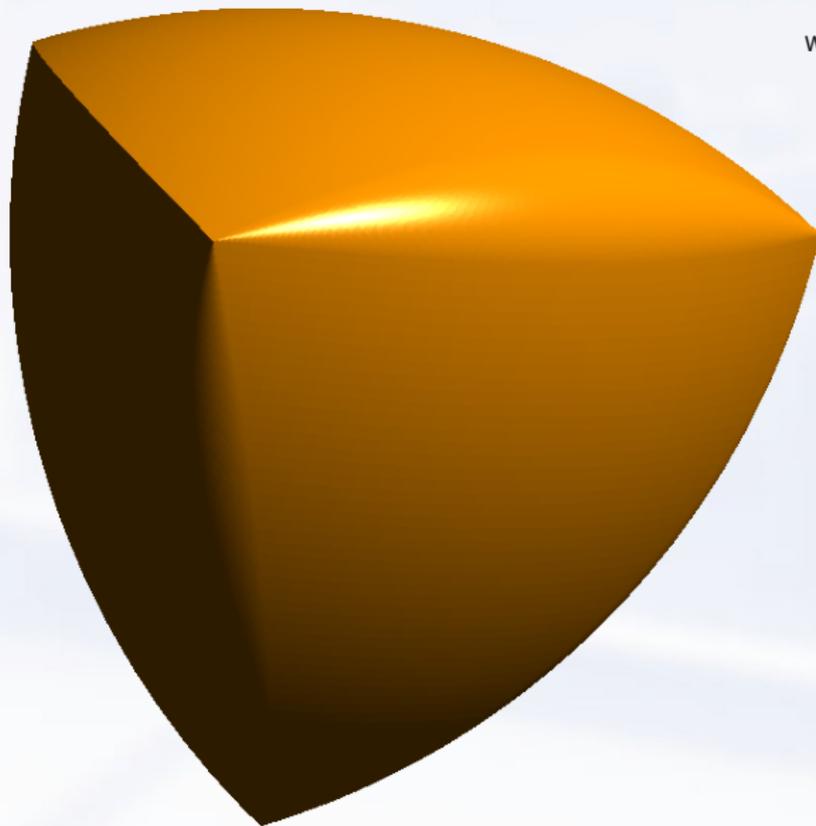
Weite: $0,9998175 - 1$
($\approx 14,6\mu\text{m}$)

1004004 Dreiecke
(Meißner „Ecke“)



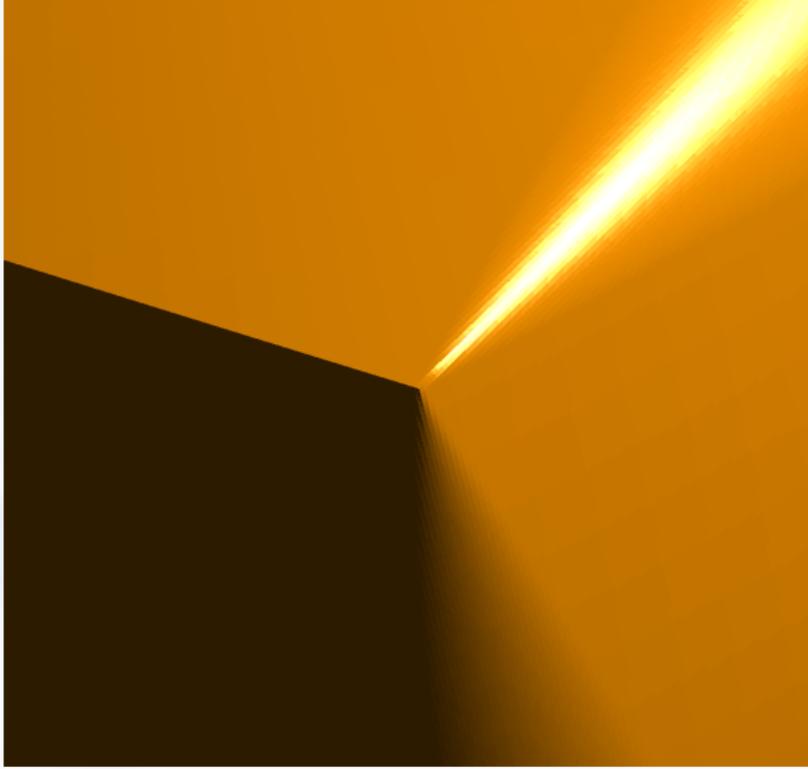
Weite: $0,9999829 - 1$
($\approx 1,37 \mu\text{m}$)

1004004 Dreiecke
(Meißner „Fläche“)



Weite: $0,9999829 - 1$
($\approx 1,37 \mu\text{m}$)

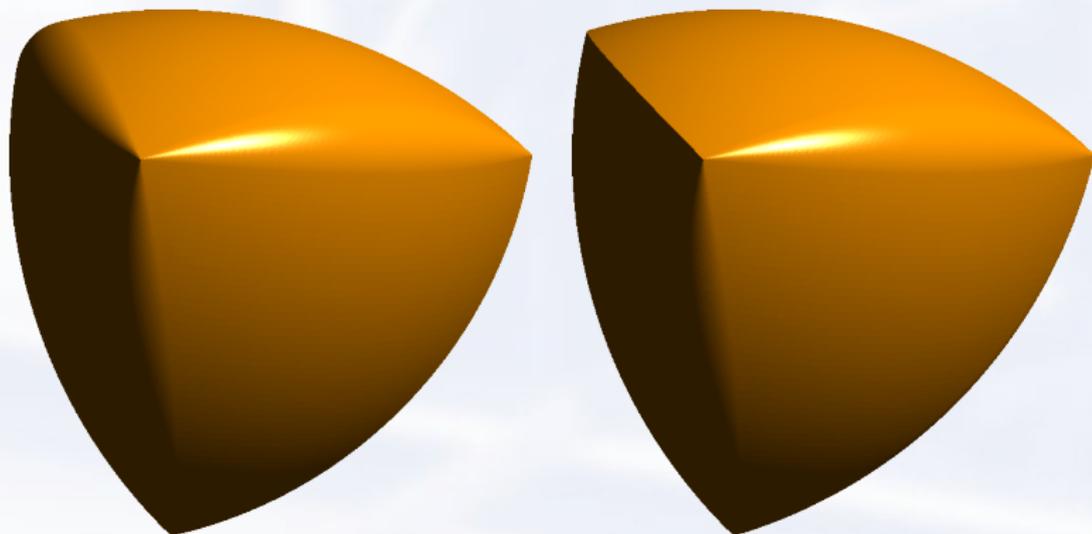
1004004 Dreiecke (Zoom)
(Meißner "Fläche")



40804 Dreiecke

(Meißner Fläche 40k)

Konstruktion und 3D-Druck



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.